Zur Praxis der sin(x)/x-Interpolation bei Messungen mit dem Digital-Oszilloskop

Wo analog war, soll analog werden

Sampling ist ein Prozess, bei dem ein in der Zeit kontinuierliches Signal in eine Reihe von Einzelwerten umgesetzt wird. Die Methode, nach der aus diesen Einzelmessungen das kontinuierliche Signal wiederhergestellt wird, ist genauso wichtig. Obwohl es viele Methoden zur Rekonstruktion des Signals gibt, nutzen die meisten modernen Oszilloskope dafür die sin(x)/x-Interpolation. Der wesentliche Vorteil dieser Interpolationsmethode liegt darin, dass mit ihr der ursprüngliche Kurvenverlauf identisch rekonstruiert werden kann.

Eines der grundlegenden Konzepte in der digitalen Signalverarbeitung ist das Sampling. Im einfachsten Fall bezeichnet es die Erfassung eines in der Zeit kontinuierlichen Signals zu bestimmten Zeitpunkten. Hierdurch entsteht ein Satz von Einzelmessungen, die man als Einzelpunkte grafisch darstellen kann. Nach dem Nyquist-Theorem kann man den kontinuierlichen Verlauf des Signals aus diesen Einzelmessungen fehlerfrei rekonstruieren, sofern die Abtastfrequenz mindestens doppelt so hoch ist wie die Komponente des Messsignals mit der höchsten Frequenz und die Samples in gleichen Zeitabständen erfasst werden. Der Kehrwert der Abtastperiode T wird als Abtastfrequenz bezeichnet. Enthält das Spektrum des analogen Eingangssignals Anteile mit Frequenzen oberhalb von f = 1/(2T), der sogenannten Nyquist-Frequenz, tritt Aliasing auf. Darauf wird später noch detaillierter eingegangen.
Enthält das analoge Eingangssignal keine Frequenzanteile oberhalb der Nyquist-Frequenz f_N, kann man das Originalsignal aus den Samples fehlerfrei rekonstruieren. Dazu schneidet man bei der Rekonstruktion alle Frequenzen oberhalb von f_N ab und bekommt dann das Originalsignal. Wenn kein Aliasing auftritt, erledigt ein ideales Rechteckfilter diese Aufgabe: Es lässt alle Frequenzen unterhalb von f_N passieren und blockiert alle Frequenzen oberhalb vollständig. Wenn man nun das Spektrum des abgetasteten Signals mit dem Rechteckfilter multipliziert, bekommt man das Originalspektrum zurück.

Kurven aus Proben

Das Erstaunliche an diesem Rekonstruktionsverfahren ist, dass mit dem Rechteckfilter die Originalkurve aus den Samples wirklich ganz exakt wiederhergestellt werden kann. Man nennt die Interpolationsmethode sin(x)/x- oder sinc(x)-Interpolation. Diese Interpolationsmethode benötigt eigentlich eine unendliche Anzahl von Abtastpunkten vor und hinter dem n-ten Punkt, der interpoliert werden soll. In der Wirklichkeit kann man allerdings FIR-Filter konstruieren, mit denen man auch mit einer endlichen Zahl von Samples eine sin(x)/x-Rekonstruktion hinreichend genau durchführen kann. Genau das machen Agilent-Oszilloskope, wenn sie ein Messsignal aufnehmen. Sobald das Signal digitalisiert ist, werden die einzelnen Samples durch verschiedene Filter geschickt. Eines von diesen ist ein Interpolationsfilter, mit dem man die Kurve auf dem Bildschirm rekonstruiert.

AUTOR

Chris Rehorn und Thomas Giehm,
Agilent Technologies

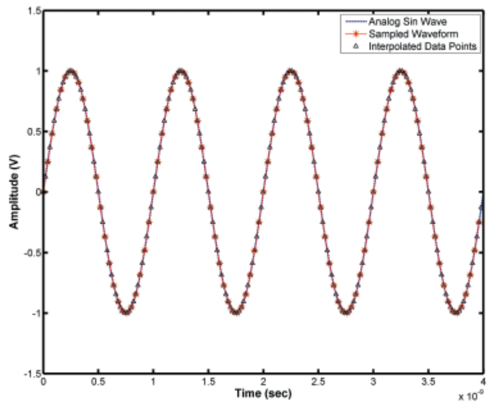

Bild 1: Wenn man ein 1-GHz-Sinussignal mit dem 25fachen der Grundfrequenz digitalisiert, kann man eine Verbindung der Messpunkte kaum vom Original und von einer idealen Konstruktion unterscheiden.

Für manche modernen Oszilloskope wird stolz eine Abtastrate angegeben, die um den Faktor 25 über der Bandbreite des Oszilloskops liegt. Das mag dem Kunden das Gefühl vermitteln, dass er mit einem solchen Gerät in keinem Fall ein Ereignis verpasst, das eventuell zwischen zwei Abtastzeitpunkten auftritt. Solche hohen Reserven bei der Abtastrate braucht man aber nicht. Aus der oben dargestellten Mathematik folgt, dass – solange die Nyquist-Kriterien nicht verletzt sind – eine Abtastrate von 2 f_N völlig ausreicht.

Ingenieure sorgen sich gelegentlich über Glitches, die zwischen zwei Abtastpunkten auftreten und daher vom Oszilloskop nicht aufgenommen werden. Wenn das allerdings der Fall ist, liegt die Frequenz der Störung oberhalb der Bandbreite des Oszilloskops. Bei analogen und digitalen Oszilloskopen gleichermaßen läuft der Signalweg über einen Tiefpass. Dieser filtert einen so kurzen Glitch aus, verteilt seine Energie in der Zeit und reduziert seine Amplitude. Was von dem Glitch nach der Filterung übrigbleibt, tastet das Digitaloszilloskop ab und zeigt es nicht besser und nicht schlechter an, als es ein Analogoszilloskop auch tun würde.
Wenn sich all das so verhält, warum bauen die Hersteller ihre Oszilloskope dann nicht so, dass die Abtastrate genau das Doppelte der Bandbreite des Oszilloskop beträgt? Das liegt darin, dass man Signale oberhalb der Bandbreite des Oszilloskops nur mit 10 dB pro Dekade abschwächen kann. Anders gesagt fällt der Frequenzgang des Oszilloskops oberhalb der spezifizierten Bandbreite nicht senkrecht ab, braucht man etwas Reserve zur Minimierung des Aliasings.

Von Punkt zu Punkt

In den folgenden Abbildungen wird ein Beispiel einer sin(x)/x-Rekonstruktion gezeigt.

Mittels eines einfachen Skripts wurde ein analoges Signal erzeugt, eine abgetastete Version des Analogsignals und mittels sin(x)/x-Interpolation aus den Samples eine Messkurve rekonstruiert. In jeder Abbildung ist das ursprüngliche Analogsignal blau und die gesampelte Kurve rot dargestellt. Die interpolierten Datenpunkte erscheinen als schwarze Dreiecke.

Angenommen, ein Sinussignal von 1 GHz wird mit 25 GS/s digitalisiert. Die Abtastrate ist um den Faktor 12,5 höher, als man sie für eine genaue Rekonstruktion braucht. Dieses Szenario ist in **Bild 1** dargestellt. Die roten Sternchen stehen für die Samples der Sinuskurve, die blaue Kurve ist das Originalsignal, und die schwarzen Dreiecke stehen für die Kurve, die mittels sin(x)/x-Interpolation rekonstruiert wurde.

Die Kurven in Bild 1 gefallen dem Nutzer des Oszilloskops, weil man die Samples ganz einfach dem Originalsignal zuordnen kann. Selbst, wenn man den Interpolationsalgorithmus ausschaltet, stellen die Samples das Messsignal am Eingang des Oszilloskops genau nach.

Nun wird die Abtastfrequenz um eine Größenordnung reduziert auf das 2,5fache der Grundfrequenz des Eingangssignals (also auf 2,5 GS/s). Das Resultat ist in **Bild 2** dargestellt. Das Nyquist-Theorem ist auch bei dieser niedrigeren Abtastrate nicht verletzt. Die roten Sternchen zeigen die Samples des Originalsignals. In rot ist eine schlichte Verbindung der Samples, in blau eine sin(x)/x-Interplolation gezeigt.

Bei der reduzierten Abtastrate ist es nicht so offensichtlich, wie das Messsignal aussah, bevor die Samples gezogen worden sind. Eine sin(x)/x-Interpolation hingegen rekonstruiert den Kurvenverlauf originalgetreu, sogar bei dieser drastisch reduzierten Abtastrate.

Die meisten Anwender messen mit ihren Oszilloskopen aber keine rein sinusförmigen Signale. **Bild 3** zeigt ein ideales 200-MHz-Rechtecksignal, das aus der ersten, dritten und fünften Harmonischen besteht. Das Signal ist mit 2,5 GS/s abgetastet, das ist genau das 2,5fache der fünften Harmonischen.

Bild 3 zeigt, dass ein Filter zur sin(x)/x- Rekonstruktion bei einer Abtastrate vom 2,5fachen der höchsten Frequenzkomponente des Messsignals den Kurvenverlauf perfekt rekonstruieren kann.

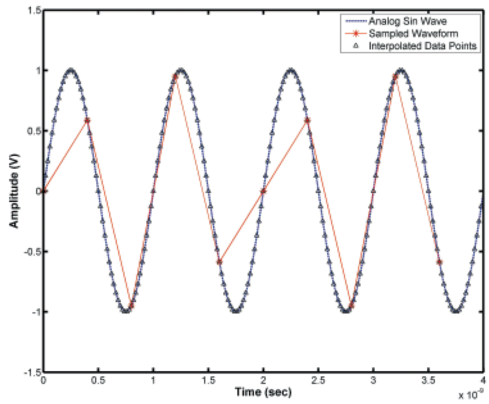

Bild 2: Bei einer Abtastrate von nur dem 2,5fachen der höchsten Frequenzkomponente des Messsignals kann man aus den Samples allein den Kurvenverlauf des Messsignals nicht mehr so recht erkennen. Wenn die Nyquist-Kriterien eingehalten sind, kann man mit Hilfe einer sin(x)/x-Interpolation den Kurvenverlauf des Messsignals identisch reproduzieren, und zwar genau so, als ob die Abtastrate um den Faktor 10 höher läge.

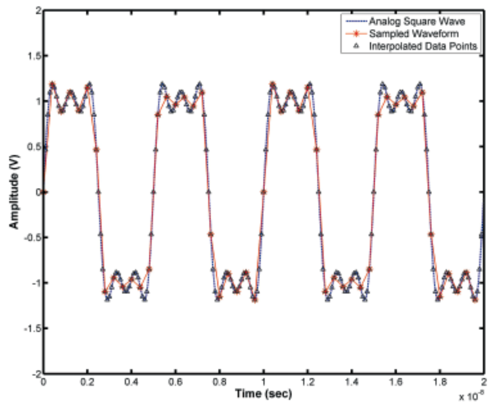

Bild 3: Ein 200-MHz-Rechtecksignal bestehend aus der 1., 3. und 5. Harmonischen, kann mittels sin(x)/x-Interpolation ideal rekonstruiert werden, solange die Nyquist-Kriterien beim Abtasten eingehalten werden.

Die obigen Fälle zeigen die Interpolation von Signalen, die die Nyquist-Kriterien einhalten. Wenn aber ein Signal digitalisiert wird, das nennenswert Frequenzanteile über f_N enthält, tritt Aliasing auf. Wenn man nun versucht, das Originalsignal über Interpolation zu rekonstruieren, funktioniert das nicht, weil nach der Abtastung durch die Überlappung hohe Frequenzen des Originalsignals als niedrige Frequenzen erscheinen. Für genaue Messungen ist dies inakzeptabel.

Zur Vermeidung von Aliasing im Zuge der Digitalisierung kann man grundsätzlich zwei Wege beschreiten, nämlich mittels eines Anti-Alias-Filters alle Frequenzanteile über f_N ausfiltern oder die Abtastfrequenz erhöhen, so dass f_N über der höchsten wesentlichen Frequenzkomponente des zu digitalisierenden Signals liegt. In manchen Fällen kann man unproblematisch die Abtastrate erhöhen. Das mag dann einfacher und billiger sein als für das Anti-Alias-Filter ein Filter höherer Ordnung zu konstruieren, das an der Grenzfrequenz einen stärkeren Abfall zeigt.

Schneller muss nicht besser sein

Ein Oszilloskop mit einer höheren Abtastrate ist nicht in jedem Fall besser. Das Signal am Eingang des Oszilloskops kann nach der Digitalisierung von einem sin(x)/x-Rekonstruktionsfilter fehlerfrei rekonstruiert werden, solange das Eingangssignal keine Frequenzanteile über der Nyquist-Frequenz enthält. Der Anwender mag versucht sein, die Interpolation abzuschalten, um so „Rohdaten" zu sehen. Das ist aber nicht notwendig. Die interpolierte Kurve ist keine „Schätzung" dessen, was das Signal zwischen den Abtastzeitpunkten gemacht haben mag, sondern genau das, was es zwischen den Samples gemacht hat. Lassen Sie also vertrauensvoll die Interpolation an Ihrem Oszilloskop eingeschaltet und messen Sie – denn das Messen ist der angenehme Teil an den Aufgaben eines Ingenieurs. (jj)

▶ infoDIRECT 561ei0809
▶ Link zu Agilent Technologies
www.elektronik-industrie.de